

УДК 681.5.015

doi:10.21685/2072-3059-2021-4-9

## Классификация цифровых нелинейных фильтров по виду дискретных сверток

М. А. Щербаков

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

mashcherbakov@yandex.ru

**Аннотация.** *Актуальность и цели.* В области цифровой обработки сигналов имеется множество задач, которые невозможно решить традиционными методами линейной фильтрации. В частности, использование линейной фильтрации не позволяет выделить сигнал из шума в случае, когда спектры полезного сигнала и помехи перекрываются. Целью настоящей работы является исследование класса цифровых нелинейных фильтров, обладающих существенно более широкими возможностями по сравнению с линейными фильтрами. *Материалы и методы.* Для описания процесса нелинейной фильтрации используется дискретное представление Вольтерра, позволяющее представить цифровой нелинейный фильтр в виде совокупности нелинейных дискретных сверток, характеризуемых ядрами различных порядков. Такое представление является естественным обобщением цифровой линейной фильтрации на нелинейный случай. Для снижения размерности ядер и упрощения анализа процесса нелинейной фильтрации опорные области цифровых нелинейных фильтров ограничиваются сечениями ядер во временной и частотной областях. *Результаты и выводы.* Предложенный подход позволяет с единой позиции описать многообразие цифровых нелинейных фильтров, определенных на сечениях ядер, и провести их классификацию во временной и частотной областях. В качестве примеров использования рассмотрены задачи подавления помех в импульсных и узкополосных сигналах, решение которых невозможно с помощью методов линейной фильтрации. Предложенная классификация цифровых нелинейных фильтров позволяет обоснованно выбирать структуру и характеристики нелинейного фильтра для решения различных задач цифровой обработки сигналов.

**Ключевые слова:** цифровая обработка сигналов, нелинейная фильтрация, полиномиальные фильтры, разложение Вольтерра, дискретные нелинейные свертки

**Для цитирования:** Щербаков М. А. Классификация цифровых нелинейных фильтров по виду дискретных сверток // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2021. № 4. С. 108–125. doi:10.21685/2072-3059-2021-4-9

## Classification of digital non-linear filters by discrete convolutions

M.A. Shcherbakov

Penza State University, Penza, Russia

mashcherbakov@yandex.ru

**Abstract.** *Background.* In the field of digital signal processing, there are many problems that can not be solved with traditional linear filtering methods. In particular, the use of linear filtering does not allow separating signal from the noise in the case when the spectra of the useful signal and interference overlap. The purpose of this work is to research a class of digital nonlinear filters that have significantly wider capabilities than linear filters. *Materi-*

---

© Щербаков М. А., 2021. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

*als and methods.* To describe the process of nonlinear filtering, a discrete Volterra representation is used, which makes it possible to represent a digital nonlinear filter in the form of a set of nonlinear discrete convolutions characterized by kernels of different orders. This representation is a natural generalization of digital linear filtering to the non-linear case. To reduce the dimensionality of the kernels and simplify the analysis of the nonlinear filtering process, the reference regions of digital nonlinear filters are limited to slices in the time and frequency domains. *Results and conclusions.* The proposed approach allows one to describe the variety of digital nonlinear filters defined on the slices of kernels from a single point of view, and to classify them in the time and frequency domains. As examples of use, the problems of noise suppression in pulsed and narrow-band signals are considered, the solution of which is impossible using linear filtering methods. The proposed classification of digital nonlinear filters makes it possible to reasonably choose the structure and characteristics of a nonlinear filter for solving various problems of digital signal processing.

**Keywords:** digital signal processing, nonlinear filtering, polynomial filters, Volterra series, discrete nonlinear convolutions

**For citation:** Shcherbakov M.A. Classification of digital non-linear filters by discrete convolutions. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Engineering sciences.* 2021;(4):108–125. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3059-2021-4-9

### Введение

В настоящее время для обработки сигналов широкое распространение получили методы линейной фильтрации [1, 2], что связано в первую очередь с простотой и наглядностью расчета линейных фильтров [3, 4]. В то же время имеется значительное количество практических приложений, в которых применение методов линейной фильтрации является явно недостаточным [5]. Традиционный подход к изучению нелинейных систем состоит в выделении некоторого класса таких систем и разработке методов для их анализа и синтеза для заданного приложения [6]. К этому классу нелинейных систем относятся полиномиальные фильтры [7–9], основанные на представлении выходного сигнала в виде функционального ряда Вольтерра.

Цифровой полиномиальный фильтр порядка  $M$  определяется отрезком дискретного функционального ряда Вольтерра (полиномом) вида

$$y(n) = \sum_{m=1}^M y_m(n) = \sum_{m=1}^M \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} h_m(n_1, \dots, n_m) \prod_{i=1}^m x(n - n_i) \quad (1)$$

и характеризует связь между входным  $x(n)$  и выходным  $y(n)$  сигналами фильтра.

Отдельные составляющие фильтра (1) представляют собой нелинейные дискретные свертки вида

$$y_m(n) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} h_m(n_1, \dots, n_m) \prod_{i=1}^m x(n - n_i). \quad (2)$$

При  $m=1$  выражение (2) является обычной линейной сверткой [2, 3], определяющей линейный дискретный фильтр с импульсной характеристикой  $h_1(n)$ . При  $m > 1$  нелинейная свертка характеризует нелинейный фильтр  $m$ -го порядка с многомерной импульсной характеристикой (ядром)  $h_m(n_1, \dots, n_m)$ .

Многие понятия линейной фильтрации легко переносятся на случай полиномиальной фильтрации. Так, например, для физической реализуемости однородного фильтра порядка  $m$  и его устойчивости необходимо выполнение следующих условий:

$$h_m(n_1, \dots, n_m) = 0 \text{ при } n_i < 0, i = 1, \dots, m;$$

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} |h_m(n_1, \dots, n_m)| < \infty.$$

Таким образом, физически реализуемый устойчивый полиномиальный фильтр порядка  $M$  можно представить в виде

$$y(n) = \sum_{m=1}^M \sum_{n_1=0}^{N-1} \dots \sum_{n_m=0}^{N-1} h_m(n_1, \dots, n_m) \prod_{i=1}^m x(n - n_i).$$

Для синтеза полиномиальных фильтров оказывается полезным их представление в частотной области [10], что позволяет рассматривать нелинейную фильтрацию как процесс преобразования гармонических составляющих входного сигнала во множество комбинационных составляющих выходного сигнала, определяемых частотными свойствами и степенью нелинейности фильтра.

Переход в частотную область позволяет представить выражение (1) в виде

$$Y(\omega) = \sum_{m=1}^M Y_m(\omega) = H_1(\omega)X(\omega) + \sum_{m=2}^M \frac{1}{(2\pi)^{m-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} H_m(\omega_1, \dots, \omega_m) \delta\left(\omega - \sum_{i=1}^m \omega_i\right) \prod_{i=1}^m X(\omega_i) d\omega_i, \quad (3)$$

где  $X(\omega)$ ,  $Y(\omega)$ ,  $Y_m(\omega)$  – преобразование Фурье соответствующих сигналов, а  $H_m(\omega_1, \dots, \omega_m)$ ,  $m = 1, \dots, M$ , – набор из  $M$  частотных характеристик (ядер в частотной области), представляющих собой преобразования Фурье импульсных характеристик  $h_m(n_1, \dots, n_m)$ ,  $m = 1, \dots, M$ .

Первый член  $Y_1(\omega)$  в выражении (3) характеризует линейную составляющую системы, а остальные  $(M - 1)$  представляют собой нелинейные составляющие  $Y_m(\omega)$ ,  $m = 2, \dots, M$ , различного порядка. Несмотря на свой исчерпывающий характер, представление (3) неудобно для практического анализа и синтеза фильтров, так как нелинейные члены определяются через многомерные функции и интегралы.

В зависимости от задачи фильтрации к проектируемому фильтру могут предъявляться различные требования, связанные с усилением или подавлением отдельных гармонических составляющих. Данные требования зачастую можно выразить путем задания значений частотных характеристик вдоль плоскостей (сечений), характеризующих вклад различных комбинационных

гармоник в суммарную реакцию фильтра. Требования к сечениям ядер в частотной области могут стать основой для выбора адекватной структуры фильтра, обеспечивающей их выполнение при минимуме затрат.

### Определение класса нелинейных фильтров через сечения их ядер

Введем понятие сечения частотного ядра  $m$ -го порядка в частотной области в виде

$$H_m(\underbrace{\lambda, \dots, \lambda}_a, \underbrace{0, \dots, 0}_b, \underbrace{-\lambda, \dots, -\lambda}_c), \quad (4)$$

где  $a + b + c = m$ . Обозначим (4) для краткости  $H_m(\lambda_{(a)}, 0_{(b)}, -\lambda_{(c)})$  и назовем  $(a, b, c)$ -сечением.

Аналогично сечению  $H_m(\lambda_{(a)}, 0_{(b)}, -\lambda_{(c)})$  ядра в частотной области определим  $(a, b, c)$ -сечение ядра во временной области:

$$h_m(n_{(a)}, 0_{(b)}, -n_{(c)}) = h_m(\underbrace{n, \dots, n}_a, \underbrace{0, \dots, 0}_b, \underbrace{-n, \dots, -n}_c).$$

Так как сечения ядер зависят лишь от одного аргумента, их можно охарактеризовать функциями одной переменной, положив:

$$H_m(\lambda_{(a)}, 0_{(b)}, -\lambda_{(c)}) = \tilde{H}_m(\lambda),$$

$$h_m(n_{(a)}, 0_{(b)}, -n_{(c)}) = \tilde{h}_m(n).$$

Пусть ядра  $m$ -го порядка во временной и частотной областях отличны от нуля лишь на своих  $(a, b, c)$ -сечениях и определяются соответственно функциями  $\tilde{h}_m(n)$ ,  $\tilde{H}_m(\lambda)$ , тогда их можно записать с использованием дельта-функций в следующей форме:

$$H_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (2\pi)^{(m-1)} \tilde{H}_m(\lambda_1) \prod_{i=2}^a \delta(\lambda_1 - \lambda_i) \prod_{k=1}^b \delta(\lambda_{a+k}) \prod_{j=1}^c \delta(\lambda_1 + \lambda_{a+b+j}),$$

$$h_m(n_1, \dots, n_m) = \tilde{h}_m(n_1) \prod_{i=2}^a \delta(n_1 - n_i) \prod_{k=1}^b \delta(n_{a+k}) \prod_{j=1}^c \delta(n_1 + n_{a+b+j}).$$

Можно показать, что имеют место следующие пары преобразований Фурье:

$$H_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \Leftrightarrow h_m(n_1 + \dots + n_a - n_{a+1} - \dots - n_{a+c}),$$

$$h_m(n_1, \dots, n_m) \Leftrightarrow H_m(\lambda_1 + \dots + \lambda_a - \lambda_{a+1} - \dots - \lambda_{a+c}), \quad (5)$$

$$\tilde{H}_m(\lambda) \Leftrightarrow h_m(n),$$

$$H_m(\lambda) \Leftrightarrow \tilde{h}_m(n),$$

где  $\Leftrightarrow$  обозначает выполнение прямого и обратного преобразований Фурье.

Рассмотрим класс нелинейных фильтров с импульсными характеристиками, определенными на своих  $(a, b, c)$ -сечениях и равными нулю всюду за их пределами. Учитывая требование симметрии ядер, импульсные характеристики  $h_m(n_1, \dots, n_m)$  таких фильтров могут быть выражены через дискретные дельта-функции в виде

$$h_m(n_1, \dots, n_m) = \left\{ h(n_1) \prod_{i=2}^a \delta(n_1 - n_i) \prod_{k=1}^b \delta(n_{a+k}) \prod_{j=1}^c \delta(n_1 + n_{a+b+j}) \right\}_{sym} =$$

$$= \frac{a!b!c!}{m!} \sum h(n_1) \prod_{i=2}^a \delta(n_1 - n_i) \prod_{k=1}^b \delta(n_{a+k}) \prod_{j=1}^c \delta(n_1 + n_{a+b+j}), \quad (6)$$

где  $\{\bullet\}_{sym}$  означает операцию симметризации импульсной характеристики  $h_m(n_1, \dots, n_m)$  путем суммирования по различным перестановкам индексов  $(n_1, \dots, n_m)$ .

Для обозначения фильтра  $m$ -го порядка с импульсной характеристикой вида (6) будем использовать сокращенную запись  $F_m^{(a,b,c)}[x(n)]$ . Назовем для краткости такие фильтры нелинейными фильтрами типа  $(a, b, c)$  во временной области. Например, импульсная характеристика нелинейного фильтра  $F_3^{(1,1,1)}[x(n)]$  будет иметь вид

$$h_3(n_1, n_2, n_3) = \{h(n_1)\delta(n_1 + n_2)\delta(n_3)\}_{sym}. \quad (7)$$

Если  $H(\omega)$  – преобразование Фурье функции  $h(n)$ , тогда в соответствии с выражением (5) нелинейные фильтры типа  $(a, b, c)$  характеризуются частотным ядром  $H_m(\omega_1, \dots, \omega_m)$  вида

$$H_m(\omega_1, \dots, \omega_m) = \left\{ H(\omega_{i_1} + \dots + \omega_{i_a} - \omega_{i_{a+1}} - \dots - \omega_{i_{a+c}}) \right\}_{sym} =$$

$$= \frac{a!b!c!}{m!} \sum_{C_m^{a+c}} \sum H(\omega_{i_1} + \dots + \omega_{i_a} - \omega_{i_{a+1}} - \dots - \omega_{i_{a+c}}), \quad (8)$$

где первая сумма выполняется по различным сочетания из  $m$  индексов  $(1, \dots, m)$  по  $(a + c)$  элементов  $(i_1, \dots, i_{a+c})$ , а вторая, как и в (6), означает операцию симметризации.

Например, преобразование Фурье для импульсной характеристики (7) будет иметь вид

$$H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{6} [H(\omega_1 - \omega_2) + H(\omega_1 - \omega_3) + H(\omega_2 - \omega_3) +$$

$$+ H(\omega_2 - \omega_1) + H(\omega_3 - \omega_1) + H(\omega_3 - \omega_2)]. \quad (9)$$

Как видно из (6) и (8), нелинейные фильтры данного вида полностью характеризуются своими функциями  $h(n)$  и  $H(\omega)$  одного аргумента, что существенно упрощает их анализ и синтез. Заметим, что известный фильтр Гам-

мерштейна [11] согласно введенной терминологии может рассматриваться как нелинейный фильтр типа  $(a, 0, 0)$ .

### Классификация нелинейных фильтров во временной области

Приведем теперь несколько примеров нелинейных фильтров заданного класса во временной области.

**Квадратичный фильтр типа  $(1, 0, 1)$** , выходной сигнал в нем описывается нелинейной сверткой вида

$$y(n) = F_2^{(1,0,1)} [x(n)] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)x(n+i)x(n-i)$$

с импульсной характеристикой

$$h_2(n_1, n_2) = \frac{1}{2} [h(n_1)\delta(n_1 + n_2) + h(n_2)\delta(n_1 + n_2)],$$

определенной на диагонали  $n_1 = -n_2$ .

Частотные свойства такого фильтра определяются ядром

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2} [H(\omega_1 - \omega_2) + H(\omega_2 - \omega_1)],$$

принимая постоянные значения вдоль линий уровня  $\omega_1 - \omega_2 = \omega$ .

Если потребовать, чтобы сумма

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) = 0, \quad (10)$$

то  $H_2(\omega, \omega) = H(0) = 0$  и фильтр будет подавлять вторую гармонику входного сигнала, а постоянная составляющая и первая гармоника будут определяться соответственно значениями  $H(2\omega)$  и  $H(\omega)$ .

Для частного случая  $h(i) = 1$  имеем  $H_2(\omega_1, \omega_2) = 2\pi\delta(\omega_1 - \omega_2)$  и на основании (3) частотный отклик фильтра  $Y(\omega) = X^2(\omega/2)$ . Таким образом, нелинейная фильтрация приводит к возведению в квадрат входного спектра  $X(\omega)$  и его растяжению в два раза по оси частот.

**Квадратичный фильтр типа  $(2, 0, 0)$**  (Гаммерштейна) определяется нелинейной сверткой вида

$$yn) = F_2^{(2,0,0)} [x(n)] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)x^2(n+i)$$

с импульсной характеристикой, равной  $h_2(n_1, n_2) = h(n_1)\delta(n_1 - n_2)$ .

В частотной области данный фильтр характеризуется ядром

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1 + \omega_2),$$

принимая постоянные значения вдоль линий уровня  $\omega_1 + \omega_2 = \omega$ . При наложении условия (10) постоянная составляющая на выходе фильтра будет

отсутствовать. Коэффициенты передачи по первой и второй гармоникам определяются соответственно значениями  $H(\omega)$  и  $H(2\omega)$ .

Если  $h(i) = 1$ , то  $H_2(\omega_1, \omega_2) = 2\pi\delta(\omega_1 + \omega_2)$ , и реакция фильтра будет характеризовать энергию сигнала

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x^2(n+i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega,$$

согласуясь с известным равенством Парсеваля [12].

**Квадратичный фильтр типа (1, 1, 0)** характеризуется следующей нелинейной сверткой:

$$y(n) = F_2^{(1,1,0)}[x(n)] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)x(n)x(n-i).$$

Нелинейная импульсная характеристика такого фильтра отлична от нуля лишь на координатных осях и равна

$$h_2(n_1, n_2) = \frac{1}{2} [h(n_1)\delta(n_2) + h(n_2)\delta(n_1)],$$

а частотная характеристика определяется выражением

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2} [H(\omega_1) + H(\omega_2)].$$

Сигнал  $y(n)$  на выходе данного фильтра фактически представляет собой произведение реакции линейного фильтра с импульсной характеристикой  $h(i)$  и входного сигнала  $x(n)$ , т.е.

$$F_2^{(1,1,0)}[x(n)] = x(n)F_1[x(n)],$$

где  $F_1[x(n)]$  обозначает операцию линейной фильтрации.

При выполнении условия (10) первая гармоника будет определяться коэффициентом передачи  $H(\omega)/2$ , а вторая – превосходить ее ровно в два раза. Если импульсная характеристика  $h(i)$  симметрична относительно начала координат:  $h(-i) = -h(i)$ , то постоянная составляющая на выходе фильтра будет подавляться.

На этом множество квадратичных фильтров, определенных во временной области, исчерпывается. Для нелинейных фильтров третьего порядка существует пять видов фильтрации, четвертого порядка – восемь и т.д. Можно показать, что в общем случае нелинейности порядка  $m$  количество возможных классов определяется выражением

$$\Delta_m = m + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor,$$

где  $\lfloor s \rfloor$  означает округление в сторону ближайшего целого, меньшего  $s$ .

В табл. 1 представлена классификация нелинейных фильтров второго и третьего порядков во временной области.

Таблица 1

## Классификация нелинейных фильтров второго и третьего порядков во временной области

		Квадратичная фильтрация	
Тип	Вид нелинейной свертки	Характеристики фильтра	
		Импульсная $h_2(n_1, n_2)$	Частотная $H_2(\omega_1, \omega_2)$
(2,0,0)	$\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)x^2(n-i)$	$\{h(n_1)\delta(n_1 - n_2)\}_{sym}$	$H(\omega_1 + \omega_2)$
(1,0,1)	$\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)x(n-i)x(n+i)$	$\{h(n_1)\delta(n_1 + n_2)\}_{sym}$	$\{H(\omega_1 - \omega_2)\}_{sym}$
(1,1,0)	$\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)x(n)x(n-i)$	$\{h(n_1)\delta(n_2)\}_{sym}$	$\frac{1}{2}[H(\omega_1) + H(\omega_2)]$
		Кубическая фильтрация	
Тип	Вид нелинейной свертки	Характеристики фильтра	
		Импульсная $h_3(n_1, n_2, n_3)$	Частотная $H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$
(3,0,0)	$\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)x^3(n-i)$	$\{h(n_1)\delta(n_1 - n_2)\delta(n_1 - n_3)\}_{sym}$	$H(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$
(2,0,1)	$\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)x^2(n-i)x(n+i)$	$\{h(n_1)\delta(n_1 - n_2)\delta(n_1 + n_3)\}_{sym}$	$\{H(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)\}_{sym}$
(2,1,0)	$\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)x(n)x^2(n-i)$	$\{h(n_1)\delta(n_1 - n_2)\delta(n_3)\}_{sym}$	$\frac{1}{3}[H(\omega_1 + \omega_2) + H(\omega_1 + \omega_3) + H(\omega_2 + \omega_3)]$
(1,2,0)	$\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)x^2(n)x(n-i)$	$\{h(n_1)\delta(n_2)\delta(n_3)\}_{sym}$	$\frac{1}{3}[H(\omega_1) + H(\omega_2) + H(\omega_3)]$
(1,1,1)	$\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)x(n)x(n-i)x(n+i)$	$\{h(n_1)\delta(n_1 + n_2)\delta(n_3)\}_{sym}$	$\frac{1}{3}\{H(\omega_1 - \omega_2) + H(\omega_1 - \omega_3) + H(\omega_2 - \omega_3)\}_{sym}$



В данной классификации можно выделить фильтры, которые могут быть представлены через степени входного сигнала и нелинейные фильтры меньших порядков, а именно

$$F_2^{(1,1,0)}[x(n)] = x(n)F_1[x(n)], F_3^{(2,1,0)}[x(n)] = x(n)F_2^{(2,0,0)}[x(n)],$$

$$F_3^{(1,1,1)}[x(n)] = x(n)F_2^{(1,0,1)}[x(n)], F_3^{(1,2,0)}[x(n)] = x^2(n)F_1[x(n)].$$

Обобщая на случай фильтрации произвольного порядка, можно утверждать, что нелинейный фильтр типа  $(a, b, c)$  порядка  $m$  с  $b \neq 0$  может быть представлен в виде произведения  $b$ -й степени входного сигнала и нелинейного фильтра  $(m - 1)$ -го порядка типа  $(a, 0, c)$ :

$$F_m^{(a,b,c)}[x(n)] = x^b(n)F_{m-1}^{(a,0,c)}[x(n)]. \quad (11)$$

Импульсная характеристика нелинейных фильтров типа  $(a, 0, c)$  в правой части (11) имеет вид

$$h_m(n_1, \dots, n_m) = \left\{ h(n_1) \prod_{i=2}^a \delta(n_1 - n_i) \prod_{j=1}^c \delta(n_1 + n_{a+j}) \right\}_{sym}$$

и определена на прямых, представляющих собой  $m$ -мерные диагонали, проходящие через начало координат. В связи с этим назовем данный класс нелинейных фильтров диагональными. Диагональные фильтры неразложимы и представляют собой своего рода базовые элементы для построения всего множества нелинейных фильтров данного класса.

Как видно из приведенных выше примеров, множество квадратичных фильтров второго порядка содержит два диагональных фильтра, кубических – также два. Нетрудно видеть, что в общем случае класс нелинейных фильтров  $m$ -го порядка содержит  $\lfloor (m + 2)/2 \rfloor$  различных диагональных фильтров.

### Классификация нелинейных фильтров в частотной области

Дуальность частотно-временных соотношений позволяет наряду с фильтрацией во временной области рассмотреть также подобный класс нелинейных фильтров в частотной области. Ядра  $H_m(\omega_1, \dots, \omega_m)$  таких фильтров отличны от нуля только на  $(a, b, c)$ -сечениях в частотной области и определяются через непрерывные дельта-функции следующим образом:

$$H_m(\omega_1, \dots, \omega_m) = (2\pi)^{(m-1)} \times$$

$$\times \left\{ H(\omega_1) \prod_{i=2}^a \delta(\omega_1 - \omega_i) \prod_{k=1}^b \delta(\omega_{a+k}) \prod_{j=1}^c \delta(\omega_1 + \omega_{a+b+j}) \right\}_{sym} =$$

$$= \frac{a!b!c!}{m!} (2\pi)^{(m-1)} \sum H(\omega_1) \prod_{i=2}^a \delta(\omega_1 - \omega_i) \prod_{k=1}^b \delta(\omega_{a+k}) \prod_{j=1}^c \delta(\omega_1 + \omega_{a+b+j}), \quad (12)$$

где  $\{\bullet\}_{sym}$  означает операцию симметризации ядра  $H_m(\omega_1, \dots, \omega_m)$  путем суммирования по различным перестановкам частот  $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ .

Импульсная характеристика данного класса нелинейных фильтров зависит от суммы/разности аргументов и имеет вид

$$h_m(n_1, \dots, n_m) = \left\{ h(n_{i_1} + \dots + n_{i_a} - n_{i_{a+1}} - \dots - n_{i_{a+c}}) \right\}_{sym} =$$

$$= \frac{a!b!c!}{m!} \sum_{C_m^{a+c}} \sum h(n_{i_1} + \dots + n_{i_a} - n_{i_{a+1}} - \dots - n_{i_{a+c}}), \quad (13)$$

где суммирование выполняется аналогично (8).

Таким образом, каждому нелинейному фильтру  $F_m^{(a,b,c)}[x(n)]$  во временной области соответствует двойственный ему фильтр в частотной области, который будем обозначать  $\tilde{F}_m^{(a,b,c)}[x(n)]$ . Например, частотным аналогом фильтра  $F_3^{(1,1,1)}[x(n)]$ , определяемого выражениями (7) и (9), будет являться нелинейный фильтр  $\tilde{F}_3^{(1,1,1)}[x(n)]$  с характеристиками:

$$h_3(n_1, n_2, n_3) = \frac{1}{6} [h(n_1 - n_2) + h(n_1 - n_3) +$$

$$+ h(n_2 - n_3) + h(n_2 - n_1) + h(n_3 - n_1) + h(n_3 - n_2)],$$

$$H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (2\pi)^2 \left\{ H(\omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_2) \delta(\omega_3) \right\}_{sym}.$$

Возможные классы нелинейных фильтров второго и третьего порядков в частотной области представлены в табл. 2. Здесь также можно выделить множество разложимых фильтров, которые определяются через нелинейные фильтры меньших порядков с помощью выражения

$$\tilde{F}_m^{(a,b,c)}[x(n)] = S^b[x(n)] \tilde{F}_{m-1}^{(a,0,c)}[x(n)],$$

где, в отличие от (11), вместо входного сигнала  $x(n)$  присутствует оператор суммирования вида

$$S[x(n)] = \sum_i x(n-i).$$

Класс неразложимых нелинейных фильтров в частотной области состоит из фильтров типа  $(a, 0, c)$  (диагональных) с ядрами

$$H_m(\omega_1, \dots, \omega_m) = (2\pi)^{(m-1)} \left\{ H(\omega_1) \prod_{i=2}^a \delta(\omega_1 - \omega_i) \prod_{j=1}^c \delta(\omega_1 + \omega_{a+j}) \right\}_{sym},$$

определенными на  $m$ -мерных диагоналях частотного пространства.

При определенных условиях нелинейные фильтры могут выражаться через дельта-функции как во временной, так и частотной областях одновременно.

Таблица 2  
Классификация нелинейных фильтров второго и третьего порядков в частотной области

Квадратичная фильтрация			Частотный отклик $Y_2(\omega)$
Тип	Характеристики фильтра	Частотная $H_2(\omega_1, \omega_2)$	
(2,0,0)	Импульсная $h_2(n_1, n_2)$ $h_2(n_1 + n_2)$	$2\pi \{H(\omega_1)\delta(\omega_1 - \omega_2)\}_{sym}$	$H(\omega/2)X^2(\omega/2)$
(1,0,1)	$\{h_2(n_1 - n_2)\}_{sym}$	$2\pi \{H(\omega_1)\delta(\omega_1 + \omega_2)\}_{sym}$	$\delta(\omega) \int H(\lambda)  X(\lambda) ^2 d\lambda$
(1,1,0)	$\frac{1}{2} [h(n_1) + h(n_2)]$	$2\pi \{H(\omega_1)\delta(\omega_2)\}_{sym}$	$H(\omega)X(\omega)X(0)$
Кубическая фильтрация			Частотный отклик $Y_3(\omega)$
Тип	Характеристики фильтра	Частотная $H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$	
(3,0,0)	Импульсная $h_3(n_1, n_2, n_3)$ $h_3(n_1 + n_2 + n_3)$	$(2\pi)^2 \{H(\omega_1)\delta(\omega_1 - \omega_2)\delta(\omega_1 - \omega_3)\}_{sym}$	$H(\omega/3)X^3(\omega/3)$
(2,0,1)	$\{h_3(n_1 + n_2 - n_3)\}_{sym}$	$(2\pi)^2 \{H(\omega_1)\delta(\omega_1 - \omega_2)\delta(\omega_1 + \omega_3)\}_{sym}$	$H(\omega)X(\omega)  X(\omega) ^2$
(2,1,0)	$\frac{1}{3} [h(n_1 + n_2) + h(n_1 + n_3) + h(n_2 + n_3)]$	$(2\pi)^2 \{H(\omega_1)\delta(\omega_1 - \omega_2)\delta(\omega_3)\}_{sym}$	$H(\omega/2)X^2(\omega/2)X(0)$
(1,2,0)	$\frac{1}{3} [h(n_1) + h(n_2) + h(n_3)]$	$(2\pi)^2 \{H(\omega_1)\delta(\omega_2)\delta(\omega_3)\}_{sym}$	$H(\omega)X(\omega)X^2(0)$
(1,1,1)	$\frac{1}{3} [h(n_1 - n_2) + h(n_1 - n_3) + h(n_2 - n_3)]_{sym}$	$(2\pi)^2 \{H(\omega_1)\delta(\omega_1 + \omega_2)\delta(\omega_3)\}_{sym}$	$\delta(\omega)X(0) \int H(\lambda)  X(\lambda) ^2 d\lambda$

Для нелинейной фильтрации во временной области таким условием является  $h(i) = \alpha$ , а в частотной –  $\tilde{h}(i) = \alpha\delta(i)$ , где  $\alpha$  – константа. Так, например, для фильтра типа (1, 0, 1) с постоянным значением импульсной характеристики линии уровня вырождаются в две взаимно перпендикулярные прямые  $n_1 = -n_2$  и  $\omega_1 = \omega_2$ .

С практической точки зрения рассмотренный вид нелинейной фильтрации является гораздо менее трудоемкой по сравнению с общим случаем полиномиальной фильтрации. Действительно, реализация такого класса фильтров во временной области сводится к взвешиванию импульсной характеристикой  $h(i)$  произведений отсчетов входного сигнала, расположенных вдоль  $(a, b, c)$ -сечений, по формуле

$$y(n) = x^b(n) \sum_i h(i) x^a(n-i) x^c(n+i).$$

В частотной области взвешиванию функцией  $h(i)$  подвергаются суммы произведений отсчетов, расположенных на гиперплоскостях, перпендикулярных  $(a, b, c)$ -сечениям, согласно выражению

$$y(n) = \left( \sum_j x(n-j) \right)^b \sum_i h(i) \times \\ \times \sum_{\substack{i_1 \dots i_{a+c} \\ i_1 + \dots + i_{a+c} = i}} x(n-i_1) \dots x(n-i_a) x(n+i_{a+1}) \dots x(n+i_{a+c}), \quad (14)$$

где суммирование по векторным индексам  $i_1, \dots, i_{a+c}$  выполняется вдоль гиперплоскостей  $i_1 + \dots + i_a - i_{a+1} - \dots - i_{a+c} = i$ .

Так как пределы суммирования в (14) не ограничены, реализация нелинейной фильтрации в частотной области возможна лишь приближенно. При конечной длине  $N$  импульсной характеристики идеальные дельта-функции в частотной области будут аппроксимироваться импульсными функциями вида  $\sin(\omega N/2)/\sin(\omega/2)$ , приближающимися к идеальной  $\delta(\omega)$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Приведенная в табл. 1 и 2 классификация позволяет в зависимости от решаемой задачи выбрать наиболее подходящий тип нелинейного фильтра. Продемонстрируем это на примерах использования нелинейной фильтрации для решения практических задач.

### Подавление фоновых помех в импульсных сигналах

Пусть полезный широкополосный импульсный сигнал  $s(n)$  искажен аддитивным шумом  $\xi(n)$ , причем известно, что амплитуда импульсов  $A_s$  существенно превосходит уровень шума  $\sigma_\xi$ . Необходимо обеспечить подавление шума в паузах между импульсами без искажения формы самих импульсов.

При решении поставленной задачи с использованием традиционной низкочастотной фильтрации подавление шума будет сопровождаться нежелательным сглаживанием фронтов импульсного сигнала. Этого можно избежать, если воспользоваться нелинейным фильтром, имеющим различный частотный отклик в зависимости от уровня входного сигнала. Для сигнала низ-

кого уровня, квалифицируемого как шум, он должен обеспечивать низкочастотную фильтрацию, а в случае превышения сигналом некоторого заданного уровня  $\theta$  – передавать сигнал без искажения или даже проявлять свойства фильтра высоких частот, усиливая полезный сигнал. Такого поведения фильтра можно добиться, если, например, параллельно линейному низкочастотному фильтру с импульсной характеристикой  $h(i)$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ , подключить высокочастотный нелинейный фильтр типа  $(m, 0, 0)$ . Положим импульсную характеристику  $h_{\Delta}(i)$  нелинейного фильтра равной

$$h_{\Delta}(i) = \begin{cases} 1 - h(i), & i = M; \\ -h(i), & i = 0, \dots, N-1, i \neq M, \end{cases} \quad (15)$$

где  $M = (N - 1)/2$ , и рассмотрим выходной сигнал на выходе нелинейного фильтра вида

$$y(n) = \frac{1}{\theta} \sum_{i=0}^{N-1} h(i)x(n-i) + \frac{1}{\theta^m} \sum_{i=0}^{N-1} h_{\Delta}(i)x^m(n-i), \quad m = 2, 3, \dots \quad (16)$$

Для сигналов низкого уровня ( $\sigma_{\xi} < \theta$ ) основной вклад в  $y(n)$  дает низкочастотный линейный фильтр (первый член). При увеличении сигнала начинает оказывать влияние высокочастотный нелинейный фильтр (второй член), компенсируя сглаживающее действие низкочастотного фильтра. Для сигналов, существенно превышающих порог  $\theta$ , нелинейный фильтр в целом начинает проявлять высокочастотные свойства, усиливая полезный сигнал. Характер зависимости фильтрации от изменения уровня входного сигнала  $x(n)$  можно регулировать величиной порога  $\theta$  и степенью  $m$  нелинейности фильтра. Выбор нечетных значений  $m$  позволяет сохранить знак  $x(n)$ .

На рис. 1 приведены характеристики низкочастотного линейного фильтра и высокочастотного нелинейного фильтра, рассчитанные для длительности  $N = 19$ . Сумма частотных характеристик данных фильтров равна единице, что обеспечивается за счет выражения (15). Результаты фильтрации показаны на рис. 2. Входной сигнал представлял собой последовательность единичных импульсов ( $A_s = 1$ ), искаженную гауссовым шумом с  $\sigma_{\xi} = 0,1$  (рис. 2,а). Для фильтрации шума сначала использовалась линейная низкочастотная фильтрация (рис. 2,б), а затем – нелинейная вида (16) с квадратичным фильтром ( $m = 2$ ) и величиной порога, равной  $\theta = 1,2$  (рис. 2,в). Как видно из полученных результатов, нелинейная фильтрация обеспечивает такое же подавление межимпульсных шумов, как и линейная, но практически не изменяет крутизну фронтов импульсов. В то же время данный нелинейный фильтр может несколько усиливать шумы на вершинах импульсов. Однако подобные искажения не играют существенной роли в цифровых системах, использующих перепады сигнала, и легко могут быть исключены с помощью простого ограничителя амплитуды.

### Подавление помех в узкополосных сигналах

Рассмотрим теперь задачу фильтрации суммы  $s(n)$  узкополосных сигналов, искаженных аддитивным шумом  $\xi(n)$ . Спектр такого сигнала представляет собой несколько пиков на фоне равномерного спектра помехи,

меньшего уровня. Таким образом, постановка данной задачи в частотной области до некоторой степени сходна с формулировкой предыдущей задачи во временной. Поэтому воспользуемся для ее решения нелинейной фильтрацией типа (2, 0, 1) в частотной области, определяемой согласно табл. 2 следующим образом:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)|X(\omega)|^2. \quad (17)$$

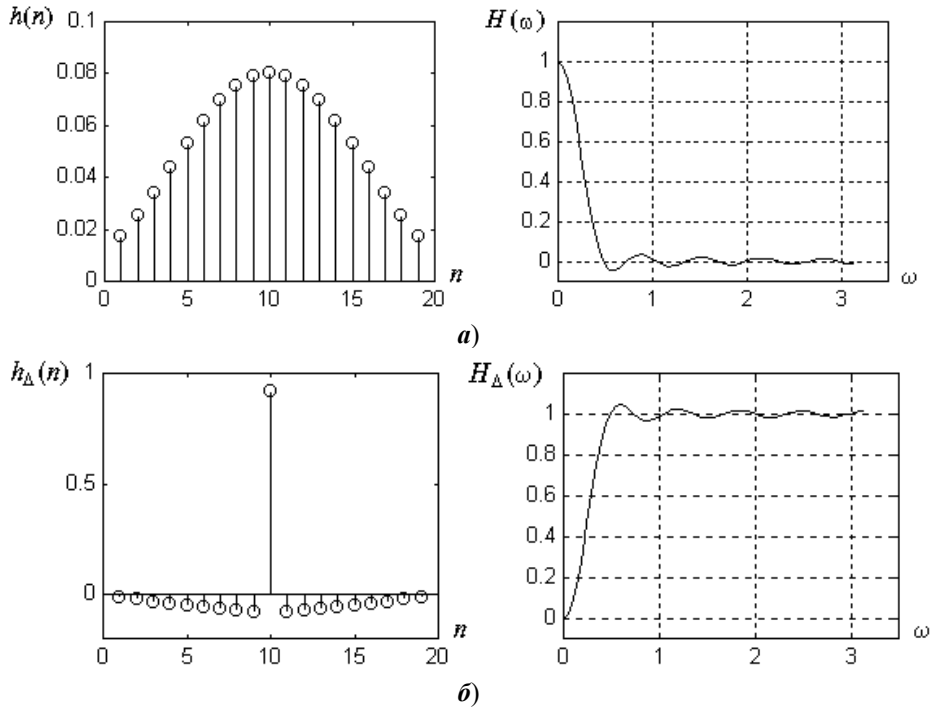


Рис. 1. Импульсные и частотные характеристики:  
а – линейного фильтра; б – нелинейного фильтра

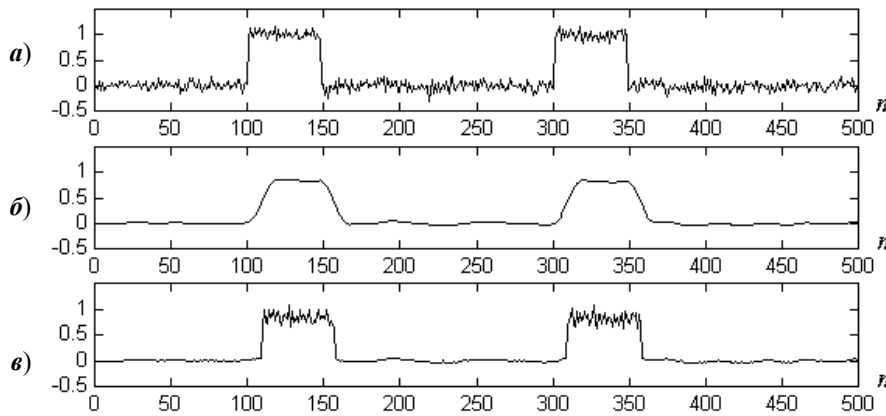


Рис. 2. Фильтрация импульсного сигнала: а – входной сигнал; б – результат линейной фильтрации; в – результат нелинейной фильтрации

В выражении (17), в отличие от частотного представления линейного фильтра, частотный отклик  $Y(\omega)$  зависит также от квадрата модуля входного спектра  $X(\omega)$ . Пусть известно, что модуль спектра помехи не превышает некоторого значения  $S_{\xi}$ . Тогда, если выбрать величину порога  $\theta > S_{\xi}$  и положить в (17)  $H(\omega) = 1/\theta^2$ , нелинейная фильтрация вида

$$Y(\omega) = \frac{1}{\theta^2} X(\omega) |X(\omega)|^2 \quad (18)$$

будет приводить к ослаблению частотных составляющих входного спектра  $X(\omega)$  при  $|X(\omega)| < \theta$  и усилению при  $|X(\omega)| > \theta$ . Следует заметить, что такая фильтрация касается только амплитудного спектра входного сигнала и не затрагивает его фазовый спектр.

Во временной области соотношению (18) соответствует нелинейная свертка третьего порядка с импульсной характеристикой (см. табл. 2)

$$h_3(i_1, i_2, i_3) = \frac{1}{\theta^2} \{ \delta(i_1 + i_2 - i_3) \}_{sym},$$

которая может быть представлена выражением

$$y(n) = \frac{1}{\theta^2} \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \sum_{i_2=-\infty}^{\infty} x(n-i_1)x(n-i_2)x(n-i_1-i_2).$$

Для практической реализации нелинейного фильтра данного типа вместо выражения (18) можно воспользоваться его дискретным аналогом

$$Y(k) = \frac{1}{\theta^2} X(k) |X(k)|^2, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

или соответствующей нелинейной сверткой

$$y(n) = \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{N-1} x(n-i_1)x(n-i_2)x(n-i_1-i_2).$$

Используемый для моделирования полигармонический сигнал представлял собой сумму трех синусоид с фазами, которые выбирались случайным образом в различных сериях экспериментов. Одна из реализаций такого процесса показана на рис. 3,а. На данный сигнал был наложен гауссов шум с равномерным спектром, составляющим 0,2 от значения амплитуды входного сигнала (рис. 3,б). Величина порога  $\theta$  выбиралась на уровне 0,5 модуля  $|X(\omega)|$  входного спектра. Полученная в результате нелинейной фильтрации реализация показана на рис. 3,в и, как видно из сравнения с рис. 3,а, достаточно близка к полезному сигналу. На рис. 4 приведены амплитудные спектры сигнала до и после фильтрации. Здесь, как и следовало ожидать, наблюдается снижение относительного уровня спектра помех по отношению к спектру полезного сигнала, представляющего собой три хорошо различимых всплеска на частотах, соответствующих отдельным синусоидам.

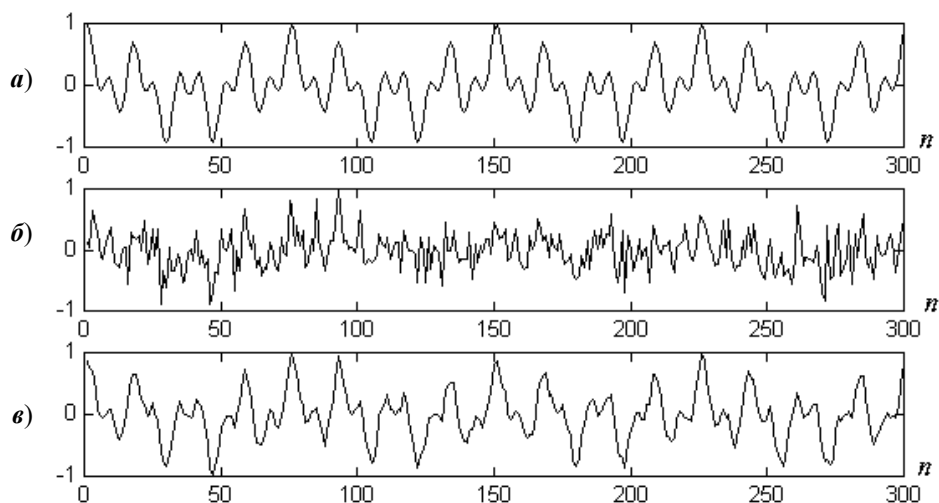


Рис. 3. Фильтрация полигармонического сигнала, искаженного гауссовым шумом:  
*a* – полезный сигнал в виде суммы трех синусоид; *б* – искаженный сигнал;  
*в* – результат нелинейной фильтрации

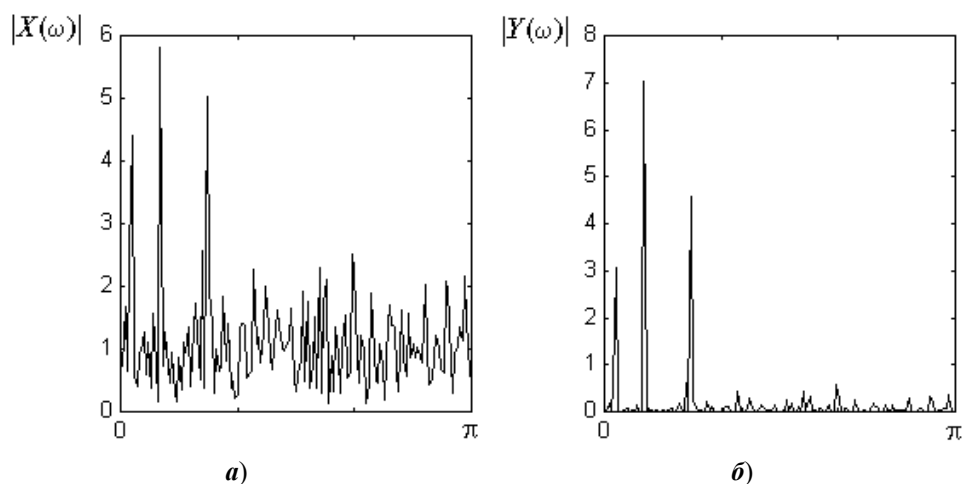


Рис. 4. Амплитудные спектры: *a* – входного сигнала, искаженного гауссовым шумом с равномерным спектром; *б* – сигнала на выходе нелинейного фильтра

### Заключение

Представленные результаты демонстрируют высокую эффективность использования нелинейной фильтрации в задачах цифровой обработки сигналов, решение которых традиционными методами линейной фильтрации не представляется возможным. Предложенный подход к синтезу класса цифровых нелинейных фильтров сводится к заданию совокупности требований к сечениям ядер в частотной области, которые являются основой для выбора адекватной структуры фильтра. Подобные фильтры, оставаясь нелинейными по своей природе, по сложности приближаются к линейным, что позволяет свести исходную задачу проектирования нелинейных фильтров к синтезу цифровых линейных фильтров и использовать эффективные методы их рас-



чета. Представленная классификация цифровых нелинейных фильтров во временной и частотной областях позволяет осуществлять обоснованный выбор структуры и характеристик нелинейного фильтра для решения широкого спектра задач цифровой обработки сигналов.

### Список литературы

1. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов. М. : ООО «Бином-Пресс», 2006. 656 с.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. Изд. 2-е, испр. М. : Техносфера, 2007. 856 с.
3. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М. : Мир, 1978. 848 с.
4. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов: практический подход : пер. с англ. М. : Вильямс, 2017. 992 с.
5. Marshall S., Sicuranza G. L. *Advances in Nonlinear Signal and Image Processing*. Hindawi, 2006. 367 p.
6. Pitas I., Venetsanopoulos A. N. *Nonlinear digital filters: principles and applications*. Kluwer Academic Publishers, 1990. 391 p.
7. Mathews V. J., Sicuranza G. L. *Polynomial signal processing*. John Wiley & Sons, Inc., 2000. 452 p.
8. Щербаков М. А. Цифровая полиномиальная фильтрация: теория и приложение. Пенза : Изд-во Пенз. гос. техн. ун-та, 1997. 246 с.
9. Щербаков М. А. Развитие теории и приложений цифровой полиномиальной фильтрации // Методы и средства измерения в системах контроля и управления : труды междунар. науч.-техн. конф. Пенза : Инф.-изд. центр ПГУ, 2002. С. 50–56.
10. Щербаков М. А. Синтез нелинейных фильтров в частотной области // Цифровая обработка сигналов и ее применение : докл. 3-й Междунар. конф. М., 2000. Т. 1. С. 182–185.
11. Коплярова Н. В., Сергеева Н. А. Непараметрические модели динамических объектов класса Гаммерштейна // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М. Ф. Решетнева. 2014. № 3 (55). С. 93–100.
12. Ахмед Н., Рао К. Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М. : Связь, 1980. 248 с.

### References

1. Layons R. *Tsifrovaya obrabotka signalov = Digital signal processing*. Moscow: ООО «Binom-Press», 2006:656. (In Russ.)
2. Oppengeym A., Shafer R. *Tsifrovaya obrabotka signalov. Izd. 2-e, ispr. = Digital signal processing, the 2<sup>nd</sup> edition, revised*. Moscow: Tekhno-sfera, 2007:856. (In Russ.)
3. Rabiner L., Gould B. *Teoriya i primeneniye tsifrovoy obrabotki signalov = Theory and applications of digital signal processing*. Moscow: Mir, 1978:848. (In Russ.)
4. Ayficher E., Dzhervis B. *Tsifrovaya obrabotka signalov: prakticheskiy podkhod: per. s angl. = Digital signal processing: a practical approach: translated from English*. Moscow: Vil'yams, 2017:992. (In Russ.)
5. Marshall S., Sicuranza G.L. *Advances in Nonlinear Signal and Image Processing*. Hindawi, 2006:367.
6. Pitas I., Venetsanopoulos A.N. *Nonlinear digital filters: principles and applications*. Kluwer Academic Publishers, 1990:391.
7. Mathews V.J., Sicuranza G.L. *Polynomial signal processing*. John Wiley & Sons, Inc., 2000:452.
8. Shcherbakov M.A. *Tsifrovaya polinomial'naya fil'tratsiya: teoriya i prilozhenie = Digital polynomial filtering: theory and application*. Penza: Izd-vo Penz. gos. tekhn. un-ta, 1997:246. (In Russ.)

9. Shcherbakov M.A. Development of the theory and applications of digital polynomial filtering. *Metody i sredstva izmereniya v sistemakh kontrolya i upravleniya: trudy mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. = Methods and means of measurement in control and management systems: proceedings of an international scientific and engineering conference*. Penza: Inf.-izd. tsentr PGU, 2002:50–56. (In Russ.)
10. Shcherbakov M.A. Synthesis of nonlinear filters in the frequency domain. *Tsifrovaya obrabotka signalov i ee primeneniye: dokl. 3-y Mezhdunar. konf. = Digital signal processing and its applications: proceedings of the 3<sup>rd</sup> International conference*. Moscow, 2000;1:182–185. (In Russ.)
11. Kopyarova N.V., Sergeeva N.A. Nonparametric models of dynamic objects of the Hammershein class. *Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta im. akademika M. F. Reshetneva = Bulletin of Reshetnev Siberian State University of Science and Technology*. 2014;(3):93–100. (In Russ.)
12. Akhmed N., Rao K.R. *Ortogonal'nye preobrazovaniya pri obrabotke tsifrovyykh signalov = Orthogonal transformations in digital signal processing*. Moscow: Svyaz, 1980:248. (In Russ.)

#### **Информация об авторах / Information about the authors**

**Михаил Александрович Щербаков**  
доктор технических наук, профессор,  
заведующий кафедрой автоматизации  
и телемеханики, Пензенский  
государственный университет  
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)  
E-mail: mashcherbakov@yandex.ru

**Mikhail A. Shcherbakov**  
Doctor of engineering sciences, professor,  
head of the sub-department of automation  
and remote control, Penza State University  
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.**

**Поступила в редакцию / Received 20.11.2021**

**Поступила после рецензирования и доработки / Revised 10.12.2021**

**Принята к публикации / Accepted 18.12.2021**